VARIANTA 017

Subiectul I

a) $|z| = 1$. b) $DC = \sqrt{2}$. c) $A(3,4)$; d) $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$. e) $V = \dfrac{4}{3}$. f) $a = -8$. g) $b = 8\sqrt{3}$.

Subiectul II

1. a) prin calcul direct. b) $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0 \Rightarrow x = y = z$.

c) $(2^x)^2 + (3^x)^2 + (7^x)^2 = 2^x \cdot 3^x + 2^x \cdot 7^x + 3^x \cdot 7^x \Rightarrow 2^x = 3^x = 7^x \Rightarrow x = 0 \in \mathbf{R}$.

d) $(\forall) x \in \mathbf{Z_6}$ este solutie a ecuatiei $\hat{x}^3 = \hat{x} \Rightarrow p = 1$. e) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$.

2. a) $f'(x) = \sin x + x\cos x$. b) $\int_0^1 f(x)dx = \sin 1 - \cos 1$.

c) $f'(x) \geq 0, (\forall) x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow f$ monoton crescatoare. d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 0$.

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Subiectul III

a) calcul direct.

b) calcul direct c) calcul direct

d) $S(A \cdot A^t) = 0 \Rightarrow a = -c$ si $b = -d \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 0$.

e) $S\left((A + xB)(A^t + xB^t)\right) = S\left(A \cdot A^t + x\left(B \cdot A^t + A \cdot B^t\right) + x^2 B \cdot B^t\right) = S\left(A \cdot A^t\right) +$
$+ xS\left(B \cdot A^t + A \cdot B^t\right) + x^2 S\left(B \cdot B^t\right) = S\left(A \cdot A^t\right) + x\left(S\left(B \cdot A^t\right) + S\left(A \cdot B^t\right)\right) + x^2 S\left(B \cdot B^t\right)$.

f) Avem $S\left((A + xB)(A^t + xB^t)\right) = S\left(A \cdot A^t\right) + xS\left(B \cdot A^t + A \cdot B^t\right) + x^2 S\left(B \cdot B^t\right)$ este o funcție polimomială de gradul 2 deoarece $\det B \neq 0$ implica $S\left(B \cdot B^t\right) \neq 0$.

g) Din $S\left(B \cdot A^t\right) = S\left(\left(B \cdot A^t\right)^t\right) = S\left(A \cdot B^t\right)$ rezulta $\Delta = S\left(A \cdot B^t\right) \cdot S\left(B \cdot A^t\right) - S\left(A \cdot A^t\right) \cdot S\left(B \cdot B^t\right)$.

Din e) $\Rightarrow \Delta \leq 0$, adica inegalitatea ceruta.

Subiectul IV

a) $f_n'(x) = nx^{n-1} + \dfrac{1}{x}$.

b) $f_n'(x) > 0$, $(\forall) x > 0 \Rightarrow f_n$ strict crescatoare.

c) $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f_n(x) = +\infty$.

d) f_n' este pozitiva pe $(0, \infty) \Rightarrow f_n$ este strict crescatoare pe $(0, \infty)$, deci este injectiva. Din punctul c) rezulta ca f_n este surjectiva fiind continua. Deci f_n este bijectiva.

e) Deoarece $f_n(1) = 1$ si $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = -\infty$ rezulta ca ecuatia $f_n(x) = 0$ are o solutie $x_n \in (0,1)$. Unicitatea solutiei rezulta din bijectivitatea lui f_n.

f) $x_{n+1}^{n+1} + \ln x_{n+1} = 0$ si $x_n^n + \ln x_n = 0$ si x_n, $x_{n+1} \in (0,1) \Rightarrow x_{n+1}^n - x_n^n + \ln x_{n+1} - \ln x_n >$
$x_{n+1}^{n+1} - x_n^n + \ln x_{n+1} - \ln x_n == 0 \Rightarrow x_{n+1} > x_n$.

$g)\lim_{n\to\infty} x_n = l \in (0,1]$, deoarece sirul este monoton si marginit.

Daca presupunem $l \neq 1$ trecand la limita in relatia $x_n^n + \ln x_n = 0$ obtinem $0 + \ln l = 0 \Rightarrow l = 1$.

Prin urmare $l = 1$.